Några uppgifter om skrivsättet $r \cdot (\cos(v) + i \cdot \sin(v))$ och de Moivres formel

1. Låt $z = (2, 45°)$

   a) Skriv z på formen $z = r \cdot (\cos(v) + i \cdot \sin(v))$

   b) Beräkna z^2. *Svara på valfri form!*

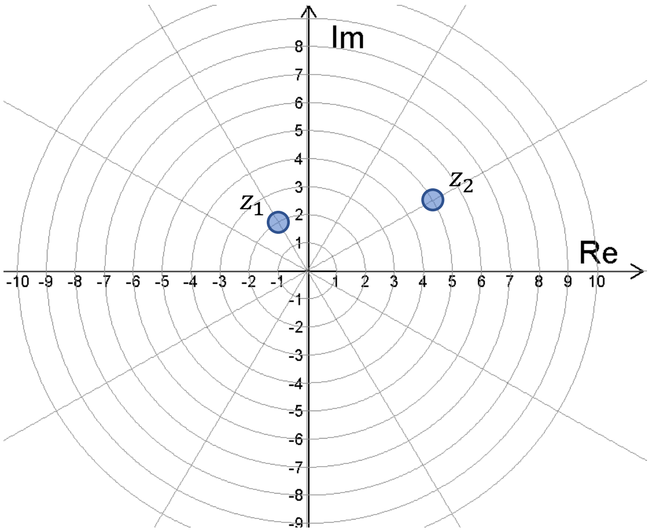
   c) Bestäm $arg(z^4)$

   d) Bestäm $|z^5|$

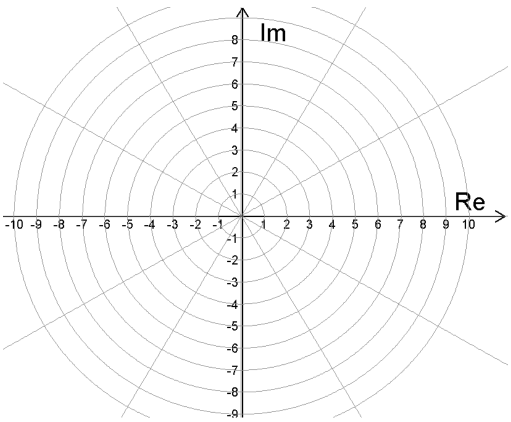
   e) Använd tabellen på ditt formelblad för att skriva om z till formen $z = a + bi$
   Svara exakt!

2. Låt $z = (4, 30°)$.
   Skriv z exakt på formen $a + bi$ genom att utgå från $r \cdot (\cos(v) + i \cdot \sin(v))$

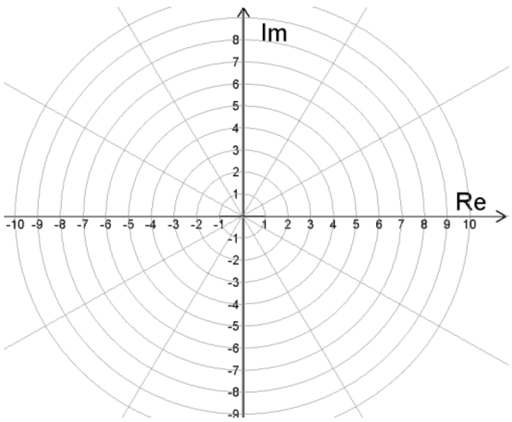
3. Nedan visas ett komplext talplan med heltalscirklar och vinkelsegment med 30° mellan
   I talplanet finns de två talen z_1 och z_2 markerade.



   a) Markera i talplanen nedan…



$z_1 . z_2$



${z_1}^3$

   b) Skriv båda talen z_1 och z_2 på formen $a + bi$ med hjälp av tabellen på ditt formelblad.
   Svara exakt!

4. Lös uppgiften nedan

> Beräkna $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^5$
> *Svara exakt på formen $a+bi$*

genom att följa dessa tre deluppgifter
Utgå från att $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

a) Använd tabellen i ditt formelblad för att skriva om z på *polär form*.

b) Beräkna med hjälp av svaret i a) z^5 på *polär form*

c) Använd tabellen på nytt för att omvandla svaret i b) till formen $a+bi$

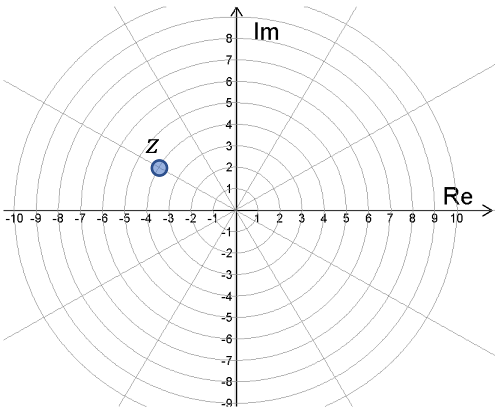
5. Lös uppgiften nedan

> Beräkna $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$
> *Svara exakt på formen $a+bi$*

6. Lös uppgiften nedan

> Beräkna $\left(3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)^3$
> *Svara exakt på formen $a+bi$*

7. Talplanet nedan visar talet z inskrivet i ett komplext talplan med heltalscirklar och vinkelsegment med $30°$.
Bestäm z^3. Svara på både polär form och exakt på formen $a+bi$.



8. Ekvationen $z^4=16\cdot(\cos(120°)+i\cdot\sin(120°))$ har fyra lösningar.
Försök hitta alla dessa fyra. *Svara på polär form*

FACIT - Några uppgifter om skrivsättet $r \cdot (\cos(v) + i \cdot \sin(v))$ och de Moivres formel

1. a) $z = 2 \cdot (\cos(45°) + i \cdot \sin(45°))$

   b) $z^2 = (4, 90°) = 4 \cdot (\cos(90°) + i \cdot \sin(90°)) = 4 \cdot (0 + 1i) = 4i$

   c) $arg(z^4) = arg(2^4, 4 \cdot 45°) = 4 \cdot 45° = 180°$

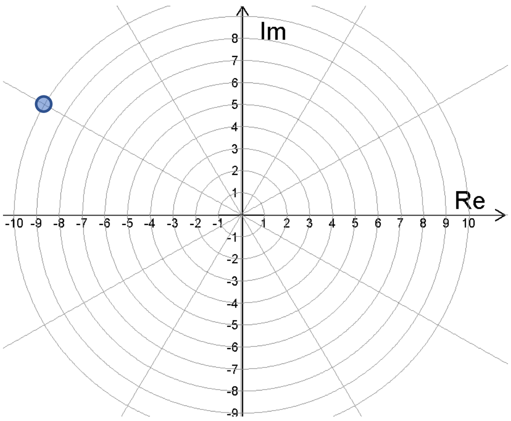
   d) $|z^5| = 2^5 = 32$

   e) Börja med att använda formen $z = r \cdot (\cos(v) + i \cdot \sin(v)) =$
   $= 2 \cdot (\cos(45°) + i \cdot \sin(45°))$, och använd formelbladet för att hitta exakta värden för $\cos(45°)$ och $\sin(45°)$. Avsluta med att multiplicera in avståndssiffran
   $2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot i$

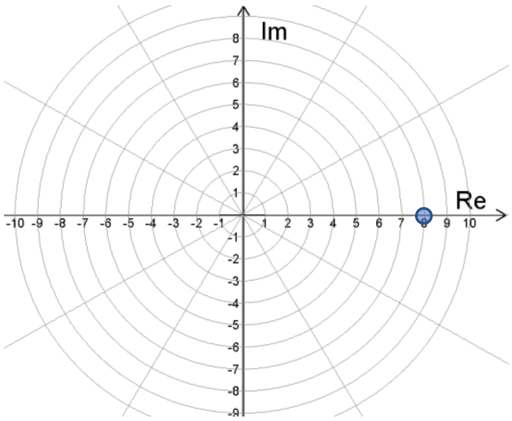
2. $z = 4 \cdot (\cos(30°) + i \cdot \sin(30°)) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{2} \cdot i = 2\sqrt{3} + 2i$

3. $z_1 = (2, 120°)$
   $z_2 = (5, 30°)$

   a) Markera i talplanen nedan…



$z_1 . z_2 = (10{,}150°)$



${z_1}^3 = (8, 360°)$

   b) $z_1 = (2, 120°) = 2 \cdot (\cos(120°) + i \cdot \sin(120°)) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i$

   $z_2 = (5, 30°) = 5 \cdot (\cos(30°) + i \cdot \sin(30°)) = 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} i$

4. Lös uppgiften nedan

Beräkna $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)^5$
Svara exakt på formen $a + bi$

genom att följa dessa tre deluppgifter

Utgå från att $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$.

a) Den första siffran har med ”cos” att göra och den andra har med ”sin” att göra. Det innebär att talet som stämmer överens i detta fall är $z = (1{,}30°)$

b) $z^5 = (1, 150°)$

c) $z^5 = (1, 150°) = 1 \cdot (\cos(150°) + i \cdot \sin(150°)) = 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

5. $z = (1{,}60°)$
$z^3 = (1{,}180°) = 1 \cdot (\cos(180°) + i \cdot \sin(180°)) = 1 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -1$

6. $z = (3{,}45°)$
$z^3 = (27{,}135°) = 27 \cdot (\cos(135°) + i \cdot \sin(135°)) = 27 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{27}{\sqrt{2}} + \frac{27}{\sqrt{2}}i$

7. Ur talplanet fås att $z = (4{,}150°)$
$z^3 = (4^3, 150° \cdot 3) = (64, 450°) = 64 \cdot (\cos(450°) + i \cdot \sin(450°))$

$450°$ finns inte med i tabellen, men ligger på samma ställe som 90°
(endast ett varv senare)

Därför gäller,
$64 \cdot (\cos(450°) + i \cdot \sin(450°)) = 64 \cdot (\cos(90°) + i \cdot \sin(90°)) = 64i$

8. När man har hittat en lösning är det jätteenkelt att hitta alla andra.
För första lösningen gäller,
Anta att $z = (r, v)$. Då blir $z^4 = (r^4, 4 \cdot v)$
Jämför man nu höger och vänstersidorna fås:

$z^4 = (16, 120°)$
$(r^4, 4 \cdot v) = (16, 120°)$

Detta ger att avståndet till z måste vara det tal som löser $r^4 = 16$, dvs $r = \sqrt[4]{16} = 2$

Och vinkeln till z är den vinkel som löser $4 \cdot v = 120°$, dvs $v = 30°$

En lösning är alltså $z = (2, 30°)$

För att hitta de övriga gäller att dela in , $360°$ i den exponent som gällde, i detta fall 4.
Detta ger den vinkel som skiljer två lösningar åt. $360°/4 = 90°$

Med vinkeln känd fås övriga lösningar enligt mönstret genom att lägga på 90°

$z_1 = (2, 30°)$

$z_2 = (2, 120°)$

$z_3 = (2, 210°)$

$z_4 = (2, 300°)$